Boole代数値の行列 (Boole代数値の解析学と超準解析)

難波, 完爾

数理解析研究所講究録
441巻 1981年 129-142

Boole 代数値の行列

東大 教養 難波完爾

P.J.Cohen の forcingmethod の代数的・位相的記述として，R.M.Solovay，D.Scott によってBoole 代数値の集合論が考えられ，その体系の構造や可能性に対する研究が進められている．ここではBoole 代数値の2項関係に対応するBoole 代数値の行列について記してみようと思う．

Boole 代数は巾等性に見られる通り特殊な代数であるが，それだけに色々の特殊な性質が得られ，その個々の性質がさらに一般の体系の性質へ引継がれたり，また変形されて成立したりするので，色々の性質を理解するには都合のよい面もあると思う．

さて集合の概念は表現函数を通じて

$$\langle a \in b \rangle = b^*(a)$$

なる関係で結ばれている．ここに b^* は集合 b の表現函数であって $\langle a \in b \rangle$ は論理式 $a \in b$ の正しさであり，通常は $\{0,1\} = 2$ であるが，一般に完備ブール代数を考える訳である．

函数の帰納的定義をたどって見ると，例えば和，積，巾などについて

$$\begin{cases} n+0 = n \\ n+m' = (n+m)' \end{cases} \qquad \begin{cases} n\cdot 0 = 0 \\ n\cdot m' = n\cdot m + n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^0 = 1 \\ n^{m'} = n^m \cdot n \end{cases} \qquad \begin{cases} n^{(0)} = 1 \\ n^{(m')} = n^{n^{(m)}} \end{cases}$$

となる訳であるが，この4番目の函数が集合論にも特徴的である．

$$n^{(m')} = \left. n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}} \right\} m$$

であるが，これを極限に於ては連続性

$$a^{(\alpha)} = \bigcup_{\nu<\alpha} a^{(\nu)}$$

で定める訳である．上記説明では自然数の函数として帰納的に定められている訳であるが，一般に直和，直積，巾等を考えるのである．

さて，順序数の全体を On とし B を一つの完備ブール代数とするとき

$$V^{(B)} = B^{(On)}$$

とする訳であるが，第4の函数を考えるということは，その中で和，積，巾が"自由"に展開できる最小の類ということを意味している．

集合論の基本的述語 $\in$，$=$ は帰納的に

$$\langle u \in v \rangle = \sum_{x \in dom(v)} v(x) \cdot \langle u = x \rangle$$

$$\langle u = v \rangle = \prod_{x \in dom(u)} (u(x) \Rightarrow \langle x \in v \rangle) \cdot \prod_{x \in dom(v)} (v(x) \Rightarrow \langle x \in u \rangle)$$

によって定められている．ブール代数の二項関係 $a \Rightarrow b$ は " ならば " に対応するもので指数函数

$$a \Rightarrow b = b^{a} = -a + b$$

である．

$$V^{(B)} = \mathcal{B}^{(On)}$$

なる関係は $V^{(B)}$ が simple type theory の model であることを意味しているが，和，積，中等が必ずしも自然な形で表現されている訳ではなくて，$\in$，$=$ の定義によらなければならないがこの定義は何か Russell の環元の公理を思い出させるものがある．そして基本的なことはこの体系の中で Zermelo - Fraenkel の集合論の公理がすべて値 1 をとることである．

上記では完備ブール代数 $\mathcal{B}$ を値に考えたが，例えば完備な体 R とか Euclid 空間への函数を考えるときには

$$V^{(R)} = R^{(On)}$$

はどの様になるであろうか．その最初の部分は

$$R^{(0)} = \{0\} \qquad\qquad R^{(1)} = \{0 \mapsto x : x \in R\}$$

等であって，唯一つの元 0 上で値 x をとる函数を x と同一視すれば $R^{(1)}$ と R は同じものであり

$$R^{(2)} = R^R$$

即ち R から R への函数の"全体"である．勿論通常は可測函数の全体とか何らかの条件を満足する函数の全体とするのであろう．

ここで少し集合論からの類推の"糸"をたどってみよう．

$\in$ 関係に対応するものは

$$\langle x \in u \rangle = u(x)$$

であった．そして同値律（equality axiom）は

$$\langle A(a) \rangle = \sum_x \langle x = a \rangle \cdot \langle A(x) \rangle$$

であって，これに応ずるものは

$$f(a) = \int \delta(x, a) \cdot f(x)\, dx$$

と考えるのが自然であろう．即ち $\langle x = y \rangle$ は $\delta(x, y)$ と解釈し，包含関係（inclusion）に応ずる

$$\langle u \subset v \rangle = \prod_{x \in dom(u)} (u(x) \Rightarrow \langle x \in v \rangle)$$

に対応するものは

$$\exp\left(\int u(x) \log v(x)\, dx \right)$$

とするのが自然のように見える．この様なものについて集合論で成立する性質がそのままの形とかそれに近い形で成立すると考えてはいないが，他の分野でこの様な形の積分がしば

しば用いられていることも考えて，この様な形式やその意味を考えてみることは全く意味のないこととは考えにくいと思う．

さてブール代数値の集合論の *model* では最大値定理が成立する．これは任意の論理式に対して

$$\langle \exists x\, A(x) \rangle = \langle A(u) \rangle$$

となる u が存在するというものである．この性質はブール代数の双対位相空間が *compact* で *totally disconnected* なことに対応している．ブール代数の埋込み $\check{}\ : \mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{B}$ は自然に $V = V^{(2)}$ から $V^{(\mathcal{B})}$ への埋込みに *covariant* な形で拡張できる．即ち

$$V = V^{(2)} \subset V^{(\mathcal{B})}$$

と考えることが出来る．$V^{(\mathcal{B})}$ の中に於て $V^{(2)}$ の元であること，$\langle u \in V^{(2)} \rangle = 1$ であれば，u は

$$u = \sum_{x} \langle u = \check{x} \rangle \check{x}$$

の様に直交系に展開できる．直交の意味は *equality* によって

$$\langle u = \check{x} \rangle \langle u = \check{y} \rangle \leq \langle \check{x} = \check{y} \rangle = \delta(x, y)$$

が成立することであり，$\mathbf{1}$ の分解ということと $V^{(2)}$ の元であることが同値であることを意味している．

例えば順序数 (*ordinal number*) の概念は推移性と元の推移性

$$\forall x \in a\, \forall y \in x\, (y \in a)$$

$$\forall x \in a\, \forall y \in x\, \forall z \in y\, (z \in x)$$

によって定められるので常にVの元であるが、選択公理によれば$V^{(B)}$の元は一つの順序数と対応出来るので

$$\langle \exists f : u \xrightarrow[onto]{1-1} \alpha \rangle = 1$$

となる訳である。最大値定理と展開定理によれば

$$\sum_{\alpha \in On} \langle f : u \xrightarrow[onto]{1-1} \check{\alpha} \rangle$$

であり、完備ブール代数が一つの集合であるから

$$\{\alpha \in On : \langle f : u \xrightarrow[onto]{1-1} \check{\alpha} \rangle \neq 0\}$$

直交性によって、有界な集合になる。この事は可能性$\langle f : u \xrightarrow[onto]{1-1} \check{\alpha} \rangle$で$u$は$\alpha$と1対1対応していることを意味しており、これらの可能性での場合に一意的に分解出来ることを意味する。

基数の概念は

$$\forall x \in \alpha \, \forall f : x \to \alpha \, \exists y \in \alpha \, \forall z \in x \, (f(z) \neq y)$$

であるから制限されていない束縛記号は$\forall f : x \to \alpha$のみであって$\forall$であるから$V^{(B)}$で基数であれば$V^{(2)} = V$の中でも基数である。したがって上記の直交分解は基数の一部分を用いて可能である。この様にして同型な性質については、元は1の分解、部分集合はブール値のベクトル、二項関係はブール値の行列が対応している。

(a, b)型の行列はそれに応ずる関係Rと

$$A(x, y) = \langle \check{x} R \check{y} \rangle$$

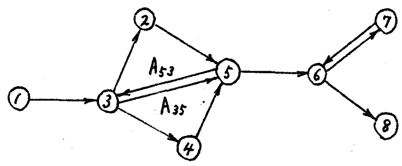
なる関係で結ばれている．その積については

$$AB(x,y)=\langle \exists z\in\check{c}\,(xRz\wedge zSy)\rangle$$

で定められ通常の行列の乗法にしたがう．そして，その中についても，正方行列については

$$A^0(x,y)=\langle \check{x}=\check{y}\rangle$$

そして勿論 $A^{n'}=A^nA$ で定める．これは推移行列と考えられる．



この様なブール代数値の関係の標準的表示にはやはり固有方程式

$$A\mathfrak{x}=a\mathfrak{x}$$

に着するのが自然であろう．ここに A は行列，$\mathfrak{x}$ はベクトル a はブール代数 $\mathfrak{B}$ の元である．$\mathfrak{x}\neq 0$ であるとき，a は固有値，$\mathfrak{x}$ は固有ベクトルと呼ばれる．内容的には

$$a\leq\langle A\mathfrak{x}=\mathfrak{x}\rangle$$

であって $\mathfrak{x}$ は関係 A で不変の集合であることを意味している．

関係の中で特に重要なものは函数の概念で，これは

$$\forall x\in\check{a}\,\exists y\in\check{b}\,(xRy)$$

$$\forall x\in\check{a}\,\forall y\in\check{b}\,\forall z\in\check{b}\,(xRy\wedge xRz\to y=z)$$

と記すことが出来る．行列の言語で記せば

$$\sum_{y \in b} A(x,y) = 1$$

$$y \neq z \rightarrow \sum_{x \in a} A(x,y)A(x,z) = 0$$

であることを意味している．即ち行ベクトルの長さ1，異なる列ベクトルが直交することを意味している．onto であることは列ベクトルの長さ1，one to one であることは行ベクトルの直交性，逆の関係には転置行列，そして1対1対応には直交行列（unitary matrix）が対応している．直交行列Uの転置行列をU^*とするとき

$$U^* A U$$

関係Aの1対1函数による変形である．

$$U^* A U \mathbf{x} = a \mathbf{x} \qquad\qquad A U \mathbf{x} = a U \mathbf{x}$$

は同値であるから$U^* A U$の固有ベクトル$\mathbf{x}$とAの固有ベクトル$U\mathbf{x}$は対応している．

行列Aの trace

$$\sum_{x \in a} A(x,x)$$

や主対角線上の二次の行列式の和

$$\sum_{x,y \in a} (A(x,x)A(y,y) - A(x,y)A(y,x))$$

等も unitary matrix による不変量である．即ちAによる固定点の存在とか，二元の入替えのない組の存在等である．測度を考えるときは，これらの"個数"とか"割合"が対応している．

さてAをa上の推移関係と考えて，Neumann級数をとり，ブール値の順序を

$$\langle\check{x} \leq \check{y}\rangle = \sum_{n\in\omega} A^n(x,y)$$

で定めれば，これは一つの部分順序である．また

$$\langle\check{x} < \check{y}\rangle = \sum_{n=1}^{\omega} A^n(x,y)$$

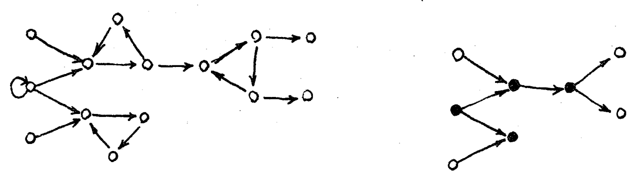
とすれば

$$x \leq y \equiv x < y \vee x = y$$

が成立するが必ずしも $x<y$ ならば $x \neq y$ を意味するものではない．同値関係

$$x \sim y \equiv x \leq y \wedge y \leq x$$

によって同値類に分解することが出来る．



ここに●は $x<x$ となるものを示しておいた．

この部分順序に対応した位相空間が考えられる．即ち

$$y \in V(x) \equiv y \leq x$$

として $V(x)$ を x の唯一つの近傍とする訳である．この空間はいわゆるKolmogorov空間であって，順序による位相空間は任意の開集合の共通部分が再び開集合であるという性質で特徴づけられている．

集合についてはAで不変であることとこの順序に関する位

相と深く関係している．即ち $A\divideontimes=\divideontimes$ なる性質は

$$\forall x\in\divideontimes\ \exists y\in\divideontimes\ (yAx)$$

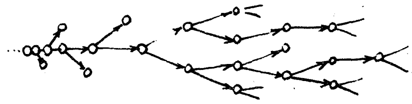
$$\forall x\in\divideontimes\ \forall y\in u\ (xAy\to y\in\divideontimes)$$

であって，関係 $<$ を用いて記すと

$$\forall x\in\divideontimes\ \exists y\in\divideontimes\ (y<x)$$

$$\forall x\in\divideontimes\ \forall y\in u\ (x\leq y\to y\in\divideontimes)$$

故に $V^*(x)=\{y\in u: x\leq y\}$ で決定される位相空間の開集合，したがって，もとの順序による位相空間の開集合であることを意味している．前の方の性質は $\divideontimes$ には極小元がないこと，即ち well-founded でないことを意味している．well-founded な開集合の任意の和は再びこの性質を有する．これが A の巾零元の全体で，その補集合が最大の不変集合である．不変集合の全体の族は任意個の和について閉じている．



ここで極小な不変集合について記しておくと

$$\cdots<x_n<\cdots<x_1<x_0$$

なる無限下降列に対して

$$\bigcup_{n\in\omega}V^*(x_n)$$

は不変集合であるから，極小不変集は

$$\forall x\in\divideontimes\ \forall y\in\divideontimes\ \exists z\in\divideontimes\ (z<x\wedge z<y)$$

を満足するという意味でcompatibleである．即ち $\mathfrak{X}$ は filter である．また $x \in \mathfrak{X}$ に対して $V^*(x)$ は well-founded である．不変集合 $\mathfrak{X}$ が minimal である為の必要十分条件は $\mathfrak{X}$ がその中の任意の無限下降列で生成されることである．例えば順序が有理数の全体の様に稠密な場合は minimal でない訳である．

特別な場合として A の転置行列が函数を定める場合は

$$\cdots < A^{*n}(x) < \cdots < A^*(x) < x$$

によって決定される集合は極小であり，この場合は異なる極小不変集合は互に素である．したがって任意の不変集合は互に共通部分のない極小不変集合の和集合として表現できる．

任意の不変集合が互に素な極小不変集合の和である為の必要十分条件は，任意の無限下降列

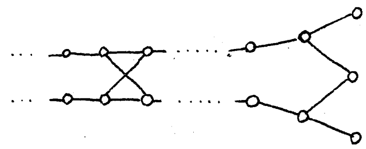
$$\cdots < x_n < \cdots < x_1 < x_0$$

$$\cdots < y_n < \cdots < y_1 < y_0$$

に対して

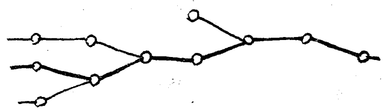
$$\exists n \exists z\, (x_n < z \wedge y_n < z) \longrightarrow \exists n \forall m\, (y_m < x_n \wedge x_m < y_n)$$

が成立することである．



A が函数である場合には任意の不変集合は極小の不変集合の和であるが互に素とは限らない．この場合には木構造とか

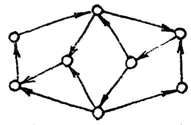
枝の概念とも関係している.



unitary 行列では互に素な巡回置換の積に分解出来る. また symmetric な行列では互に素な連結成分に分解できる.

$$x \approx y \equiv x \leq y \wedge y \leq x$$

による同値律に対しては次の様な graph が対応している.



これらの概念の記述の為に 2 値の graph の記述を用いたが勿論これらは任意のブール値の関係とすべきで, その内容は少し広いものであるが, これらの概念で記述できるものがどの程度の範囲のことに結びついているのかは興味深いところである.

そこで $\mathbb{B}$ を Borel 集合族, μ を $\mathbb{B}$ 上の σ-finite な測度, I_μ を measure ideal

$$a \in I_\mu \equiv a \in \mathbb{B} \wedge \mu(a) = 0$$

とすると, その quotient algebra

$$\mathcal{B} = \mathbb{B}/I_\mu$$

は完備ブール代数である. $\mathcal{B}$ 値の集合論の中での関係を表現する行列にはその成分各の測度を対応させる行列が対応して

いる．即ち $A(x,y)$ に $\mu(A(x,y))$ を対応させる行列で，これを $\mu(A)$ と記する．一般に通常の行列として

$$\mu(AB) = \mu(A)\mu(B)$$

が成立すべくもないが，それでも自然な概念のうちにこれを満足するものが多く存在するであろうことは想像できる．例えば，A が函数を表現している場合は

$$y_1 \neq y_2 \longrightarrow A(x,y_1)\cdot A(x,y_2) = 0$$

であるから，互に素（disjoint）であり，また $A(x,y)$, $B(y,z)$ が独立（independent）ならば

$$\mu(A(x,y)B(y,z)) = \mu(A(x,y))\cdot\mu(B(y,z))$$

であるから

$$\mu(AB(x,z)) = \sum_{y\in b} \mu(A(x,y))\cdot\mu(B(y,z))$$

が成立する訳である．

また $V^{(B)}$ の中での実数は実数の可測函数であり，実数の n 変数の函数が常に $n+1$ 変数の函数として表現は出来ないのは当然であるが，Baire 函数に限ればそれは成立する．この様なことを考に入れて $V^{(B)}$ の中での解析学，確率論，微分方程式の理論等を考えるとき，自分にはまだ明らかではないのであるけれども，その組合せ論的意味づけは重要なものと思う．特に，積分に対応する $\exists$ とその双対の役割を演ずる $\forall$ と微分や乗法的算法

$$\exp \int \log v(x)\,dx$$

の役割とか意味づけは恐らくはすでに良く知られた概念に落ちるのであろうが興味あるところである.